Quadrature n° 103 (2016) 1-5

Fréquence et régularité d'une valeur d'adhérence. Application aux moyennes de Cesàro de suites divergentes

par Gary BÉCIGNEUL

Résumé.

Nous nous intéressons ici au théorème de Cesàro qui stipule que la moyenne de Cesàro d'une suite convergente converge vers la limite de cette suite. Nous généralisons ce théorème au cas de certaines suites qui ne convergent pas. Pour cela, nous introduisons des notions de fréquence et de régularité d'une valeur d'adhérence d'une suite. La fréquence d'une valeur d'adhérence d'une suite mesure l'importance de cette valeur d'adhérence, c'est-à-dire si la suite l'approche souvent ou non. La régularité d'une valeur d'adhérence indique avec quelle précision sa fréquence peut être définie. Afin de se permettre d'éviter de supposer la suite bornée, nous définissons également une notion de poids à l'infini d'une suite. Le théorème auquel nous aboutissons énonce que pour toute suite u de poids nul à l'infini, ayant un nombre fini p de valeurs d'adhérence $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ et telle que toutes ses valeurs d'adhérence lui soient régulières, la limite de la moyenne de la suite u, au sens de Cesàro, est donnée par le barycentre $\sum_{i=1}^{p} \nu_u(\alpha_i)\alpha_i$ de ses valeurs d'adhérence, où les pondérations du barycentre sont les fréquences $\nu_u(\alpha_i)$, pour i entre 1 et p. On obtient ainsi un calcul explicite de la limite de la moyenne de Cesàro de la suite u. Nous donnons ensuite des exemples qui justifient la nécessité des hypothèses de régularité et de nullité du poids à l'infini. Enfin, nous proposons en application du théorème un exercice corrigé.

I Quelques notions utiles

I.1 Le théorème de Cesàro

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-espace-vectoriel normé, et soit $u \in E^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. Si on suppose de plus que la suite u converge vers un certain $\alpha \in E$, alors le *théorème de Cesàro* stipule que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k = \alpha.$$

On montre aisément que la réciproque est fausse : soit α un élément non nul de E, alors la suite de terme général $(-1)^n\alpha$ ne converge pas dans E, et pourtant sa moyenne de Cesàro converge vers 0.

I.2 Densité

Soit $A \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$. Les *densités* de A sont définies par

$$\delta^+(A) = \limsup_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{Card}(\{0,\ldots,n-1\}\cap A)}{n},$$

$$\delta^-(A) = \liminf_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{Card}(\{0,\ldots,n-1\}\cap A)}{n}.$$

Si $\delta^+(A) = \delta^-(A)$, nous dirons que A *admet une densité*, que nous noterons $\delta(A)$. Si un ensemble est de densité strictement positive, alors il est infini. La réciproque est fausse. Considérer par exemple

$$A = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Nous avons

$$\frac{\mathrm{Card}(\{0,\ldots,n-1\}\cap A)}{n} \sim \frac{\log_2(n)}{n} \to 0.$$

II Fréquence et régularité

Quelques notations. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-espace-vectoriel normé de dimension finie. Pour $\alpha \in E$ et $\varepsilon > 0$, on note $B(\alpha, \varepsilon)$ la boule ouverte de centre α et de rayon ε. Pour $u \in E^{\mathbb{N}}$, on note $\chi_u \subset E$ l'ensemble de ses valeurs d'adhérence. On note ℓ_E^∞ l'ensemble des suites $u \in E^{\mathbb{N}}$ bornées. Pour $u \in E^{\mathbb{N}}$ et $A \subset E$, nous notons

$$u^{-1}(A) = \{n \in \mathbb{N} \mid u_n \in A\}.$$

Enfin, l'application caractéristique sur un ensemble A sera notée $\mathbf{1}_A$.

II.1 Définitions pour des valeurs d'adhérence finies

Pour $u \in E^{\mathbb{N}}$ et $\alpha \in E$, nous définissons les *fréquences* de α selon u par

$$\nu_u^+(\alpha) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \delta^+(u^{-1}(B(\alpha, \varepsilon))),$$

$$\nu_u^-(\alpha) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \delta^-(u^{-1}(B(\alpha, \varepsilon))).$$

Ces limites sur ε existent par monotonie de la dépendance en ε. Si $\nu_u^+(\alpha) = \nu_u^-(\alpha)$, nous dirons indifféremment que *la valeur d'adhérence* α ou que *sa fréquence* est *régulière* par rapport à u. Nous noterons $\nu_u(\alpha)$ cette fréquence. Intuitivement, qu'est-ce qu'une fréquence ? La fréquence $\nu_u(\alpha)$ d'une valeur d'adhérence régulière α d'une suite u mesure l'importance de cette valeur d'adhérence, c'est-à-dire si la suite l'approche souvent ou non, et dans quelle proportion, par rapport aux autres termes de la suite. Par exemple, pour $T \in \mathbb{N}^*$, et $u \in E^{\mathbb{N}}$ une suite T-périodique et injective sur une période, nous avons

$$\forall i \in \{0, \ldots, T-1\},\ \nu_u(u_i) = \frac{1}{T},$$

ce qui plaide en faveur de notre choix du terme *fréquence*, ici en tant qu'inverse d'une période. Nous verrons en section II.3 que la somme des fréquences d'une suite en ayant un nombre fini, et toutes régulières, vaut toujours 1. Ainsi, pour une telle suite u, l'application $\alpha \mapsto \nu_u(\alpha)$ peut être vue comme une probabilité sur l'ensemble fini χ_u.

II.2 Fréquence et poids à l'infini

Nous définissons également, pour $u \in E^{\mathbb{N}}$, ses *fréquences à l'infini* par

$$\nu_u^+(\infty) = \lim_{A \to +\infty} \delta^+(u^{-1}(E \setminus B(0, A))),$$

$$\nu_u^-(\infty) = \lim_{A \to +\infty} \delta^-(u^{-1}(E \setminus B(0, A))).$$

Comme précédemment, si $\nu_u^+(\infty) = \nu_u^-(\infty)$, alors nous parlerons de *la* fréquence à l'infini de u, que nous noterons $\nu_u(\infty)$. Nous dirons que ∞ est valeur d'adhérence d'une suite $u \in E^{\mathbb{N}}$ si pour tout $A > 0$, pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n > N$ tel que $\|u_n\| > A$. Nous noterons alors $\hat{\chi}_u = \chi_u \cup \{\infty\}$ si ∞ est valeur d'adhérence de u, $\hat{\chi}_u = \chi_u$ sinon. Pour une suite $u \in E^{\mathbb{N}}$ quelconque, nous définissons le *poids de u à l'infini* par

$$p_u(\infty) = \lim_{A \to +\infty} \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \|u_k\| \mathbf{1}_{(E \setminus B(0,A))}(u_k).$$

Si une suite est bornée, alors son poids à l'infini est nul. Si le poids à l'infini d'une suite est nul, alors ses fréquences à l'infini sont nulles. Les réciproques de ces deux implications sont toutes les deux fausses.

Pour la réciproque de la première implication, considérons la suite (u_n) valant $\sqrt[3]{n}$ si n est un carré, 0 sinon. Alors, pour tout $A > 0$,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k \mathbf{1}_{E \setminus B(0,A)}(u_k) \leqslant \frac{\sqrt[3]{n-1}}{n} \mathrm{Card}(\{k \in \{0, \ldots, n-1\} \mid u_k > 0\}) \sim \frac{\sqrt[3]{n}}{n} \sqrt{n} \to 0,$$

ce qui implique $p_u(\infty) = 0$. Pourtant, il est clair que u est non bornée. Donnons une explication intuitive : comme le poids à l'infini d'une suite mesure l'influence qu'auront ses grandes valeurs sur le comportement asymptotique de sa moyenne de Cesàro, notre contre-exemple exprime qu'une suite peut avoir ∞ comme valeur d'adhérence (c'est à dire être non bornée), sans pour autant que ses grandes valeurs n'influent sur sa moyenne de Cesàro.

Pour la réciproque de la seconde implication, considérons la suite (u_n) valant $2^{\sqrt{n}}$ si n est un carré, 0 sinon. Alors

$$\frac{\mathrm{Card}(\{k \in \{0, \ldots, n-1\} \mid u_k > 0\})}{n} \sim \frac{\sqrt{n}}{n} \to 0,$$

ce qui implique $\nu_u(\infty) = 0$. Pourtant

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{\lfloor \sqrt{n-1} \rfloor} 2^j = \frac{2^{\lfloor \sqrt{n-1} \rfloor + 1} - 1}{n} \to +\infty,$$

ainsi $p_u(\infty) = +\infty$. Intuitivement, nous pouvons le formuler ainsi : prendre rarement de grandes valeurs (ce qui est exprimé par l'hypothèse $\nu_u(\infty) = 0$) n'implique pas que ces valeurs ne soient pas trop grandes (ce qui est exprimé par l'hypothèse $p_u(\infty) = 0$).

II.3 La somme des fréquences vaut 1

Nous notons

$$\Omega = \{u \in E^{\mathbb{N}} \mid \mathrm{Card}(\chi_u) < \infty\,;\ \forall \alpha \in \hat{\chi}_u,\ \nu_u^+(\alpha) = \nu_u^-(\alpha)\}.$$

L'ensemble Ω est l'ensemble des suites u d'éléments de E ayant un nombre fini de valeurs d'adhérence, et telles que celles-ci soient toutes régulières par rapport à u.

Proposition. *Soit $u \in \Omega$. Alors*

$$\sum_{\alpha \in \hat{\chi}_u} \nu_u(\alpha) = 1.$$

Démonstration. Notons $\chi_u = \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$. Il y a un nombre fini de α_i ; nous pouvons donc choisir $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}\min\{\|\alpha_i - \alpha_j\| \mid i \neq j\}[$, et $A > 1 + \max\{\|\alpha_i\| \mid 1 \leqslant i \leqslant p\}$. Nous nous autorisons même à prendre $\varepsilon < 1$, de sorte que les $u^{-1}(E \setminus B(0,A)), u^{-1}(B(\alpha_1,\varepsilon)), \dots, u^{-1}(B(\alpha_p,\varepsilon))$ soient deux à deux disjoints. Nous remarquons que $\mathbb{N} \setminus (u^{-1}(E \setminus B(0,A)) \cup (\cup_{i=1}^p u^{-1}(B(\alpha_i,\varepsilon))))$ est fini, sinon u aurait au moins $p+1$ valeurs d'adhérence. Ainsi, nous avons

$$\delta(u^{-1}(E \setminus B(0,A)) \cup (\cup_{i=1}^p u^{-1}(B(\alpha_i,\varepsilon)))) = \delta(\mathbb{N}) = 1.$$

Ces ensembles étant disjoints et en nombre fini, et les fréquences étant régulières, la densité de l'union est la somme des densités

$$\delta(u^{-1}(E \setminus B(0,A))) + \sum_{i=1}^p \delta(u^{-1}(B(\alpha_i,\varepsilon))) = 1,$$

et par passage à la limite respectivement sur $A \to +\infty$ et $\varepsilon \to 0^+$ nous obtenons enfin

$$\nu_u(\infty) + \sum_{i=1}^p \nu_u(\alpha_i) = 1. \qquad \square$$

On peut donc voir ν_u comme une mesure de probabilité discrète sur E.

III Application aux moyennes de Cesàro

III.1 Énoncé et preuve du théorème

Théorème. *Soit $u \in \Omega$ une suite telle que $p_u(\infty) = 0$. Alors*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k = \sum_{\alpha \in \chi_u} \nu_u(\alpha)\alpha.$$

Démonstration. Commençons par remarquer que cette somme est finie. Notons $\chi_u = \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$. Soit $\varepsilon > 0$, tel que $\varepsilon < 1$ et $\varepsilon < \frac{1}{2}\min\{\|\alpha_i - \alpha_j\| \mid i \neq j\}$. Notons $I_u^{\alpha_i,n}(\varepsilon) = \{0, \dots, n-1\} \cap u^{-1}(B(\alpha_i,\varepsilon))$, pour $n \in \mathbb{N}^*$. Nous remarquons que pour $n > 0$

$$\begin{aligned}
\Big\|\frac{1}{n}\sum_{k \in I_u^{\alpha_i,n}(\varepsilon)} u_k - \frac{1}{n}\mathrm{Card}(I_u^{\alpha_i,n}(\varepsilon))\alpha_i\Big\| &\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k \in I_u^{\alpha_i,n}(\varepsilon)} \|u_k - \alpha_i\| \\
&\leqslant \varepsilon \frac{\mathrm{Card}(I_u^{\alpha_i,n}(\varepsilon))}{n} \\
&\leqslant \varepsilon. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Par ailleurs, grâce à une inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{1}{n}\mathrm{Card}(I_u^{\alpha_i,n}(\varepsilon)) - \nu_u(\alpha_i)\Big| \\
&\leqslant \Big|\frac{1}{n}\mathrm{Card}(I_u^{\alpha_i,n}(\varepsilon)) - \limsup_{p \to +\infty} \frac{1}{p}\mathrm{Card}(I_u^{\alpha_i,p}(\varepsilon))\Big| \\
&\quad + \Big|\limsup_{p \to +\infty} \frac{1}{p}\mathrm{Card}(I_u^{\alpha_i,p}(\varepsilon)) - \nu_u(\alpha_i)\Big|.
\end{aligned}$$

Or les α_i sont régulières pour u, et

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n \to +\infty} \Big|\frac{1}{n}\mathrm{Card}(I_u^{\alpha_i,n}(\varepsilon)) - \limsup_{p \to +\infty} \frac{1}{p}\mathrm{Card}(I_u^{\alpha_i,p}(\varepsilon))\Big| = \\
&\limsup_{p \to +\infty} \frac{1}{p}\mathrm{Card}(I_u^{\alpha_i,p}(\varepsilon)) - \liminf_{n \to +\infty} \frac{1}{n}\mathrm{Card}(I_u^{\alpha_i,n}(\varepsilon)).
\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \limsup_{n \to +\infty} \Big|\frac{1}{n}\mathrm{Card}(I_u^{\alpha_i,n}(\varepsilon)) - \limsup_{p \to +\infty} \frac{1}{p}\mathrm{Card}(I_u^{\alpha_i,p}(\varepsilon))\Big| = 0.$$

Et ainsi

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \limsup_{n \to +\infty} \Big|\frac{1}{n}\mathrm{Card}(I_u^{\alpha_i,n}(\varepsilon)) - \nu_u(\alpha_i)\Big| = 0. \qquad (2)$$

Nous déduisons de **(1)** et **(2)** par une inégalité triangulaire que

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \limsup_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^p \Big\|\frac{1}{n}\sum_{k \in I_u^{\alpha_i,n}(\varepsilon)} u_k - \nu_u(\alpha_i)\alpha_i\Big\| = 0. \qquad (3)$$

Or nous avons

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \sum_{i=1}^p \frac{1}{n}\sum_{k \in I_u^{\alpha_i,n}(\varepsilon)} u_k + \frac{1}{n}\sum_{k \in U_u^n(\varepsilon)} u_k,$$

où nous avons posé $U_u^n(\varepsilon) = \{0, \dots, n-1\} \setminus (\bigcup_{i=1}^p I_u^{\alpha_i,n}(\varepsilon))$. Nous désirons maintenant écraser le dernier terme pour conclure. Comme $p_u(\infty) = 0$, il existe $A > 0$ tel que pour tout $K \geqslant A$,

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \|u_k\|\mathbf{1}_{(E\setminus B(0,K))}(u_k) \leqslant \varepsilon.$$

Supposons même $A > 1 + \max_{i=1}^{p} \|\alpha_i\|$. Nous avons alors

$$\begin{aligned}\|\frac{1}{n}\sum_{k\in U_u^n(\varepsilon)} u_k\| &\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k\in U_u^n(\varepsilon)} \|u_k\| \\ &\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \|u_k\|\mathbf{1}_{(E\setminus B(0,A))}(u_k) \\ &\quad + \frac{1}{n}\sum_{k\in U_u^n(\varepsilon)} \|u_k\|\mathbf{1}_{B(0,A)}(u_k).\end{aligned}$$

Comme l'ensemble $\{k \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N}^* : \ k \in U_u^n(\varepsilon), u_k \in B(0,A)\}$ est fini (sinon u aurait au moins $p+1$ valeurs d'adhérence, car $\dim_{\mathbb{R}}(E) < +\infty$), nous avons

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k\in U_u^n(\varepsilon)} \|u_k\|\mathbf{1}_{B(0,A)}(u_k) = 0.$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to+\infty} \|\frac{1}{n}\sum_{k\in U_u^n(\varepsilon)} u_k\| &\leqslant \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \|u_k\|\mathbf{1}_{(E\setminus B(0,A))}(u_k) \\ &\leqslant \varepsilon,\end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to+\infty} \|\frac{1}{n}\sum_{k\in U_u^n(\varepsilon)} u_k\| = 0. \qquad (4)$$

Nous écrivons enfin

$$\begin{aligned}\|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k - \sum_{i=1}^{p} \nu_u(\alpha_i)\alpha_i\| &\leqslant \sum_{i=1}^{p} \|\frac{1}{n}\sum_{k\in I_u^{\alpha_i,n}(\varepsilon)} u_k - \nu_u(\alpha_i)\alpha_i\| \\ &\quad + \|\frac{1}{n}\sum_{k\in U_u^n(\varepsilon)} u_k\|,\end{aligned}$$

et concluons par **(3)** et **(4)** que

$$\limsup_{n\to+\infty} \|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k - \sum_{i=1}^{p} \nu_u(\alpha_i)\alpha_i\| = 0,$$

car l'expression de gauche ne dépend pas de ε. Ainsi nous avons bien

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \sum_{i=1}^{p} \nu_u(\alpha_i)\alpha_i. \qquad \square$$

III.2 Quelques remarques

On vérifie aisément que le théorème de Cesàro est le cas particulier de notre théorème où χ_u est un singleton $\{\alpha\}$, et où u est bornée. En effet, si une suite est bornée et possède une unique valeur d'adhérence, il est classique qu'elle converge vers cette dernière. Réciproquement, une suite convergente est bornée, et donc de poids nul à l'infini. De plus, si une suite u est convergente vers α, on montre aisément que sa limite lui est régulière, et que la fréquence $\nu_u(\alpha)$ de cette valeur selon la suite u vaut 1. Nous avons donc bien $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \sum_{\alpha\in\chi_u} \nu_u(\alpha)\alpha = \alpha$.

Par ailleurs, remarquons que, comme la somme des fréquences vaut 1, la limite de la moyenne de Cesàro de notre suite est un barycentre des valeurs d'adhérence. En effet, si $p_u(\infty) = 0$, alors $\nu_u(\infty) = 0$. D'où

$$\sum_{i=1}^{p} \nu_u(\alpha_i) = \sum_{\alpha\in\hat{\chi}_u} \nu_u(\alpha) = 1.$$

Enfin, justifions la nécessité des hypothèses du théorème : la régularité des valeurs d'adhérence et la nullité du poids à l'infini.

La notion de régularité est importante pour avoir la convergence de la moyenne de Cesàro. Donnons un exemple. Plaçons-nous dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Nous allons partitionner $\mathbb{N}$ en deux ensembles A et B. Nous mettons 0 et $q_1 := 1$ dans A ; puis dans B tous les entiers de 2 à p_1 où p_1 est le plus petit $k > q_1$ tel que $\frac{\mathrm{Card}(\{0,\dots,k-1\}\cap A)}{k} \leqslant \frac{1}{4}$; puis dans A tous les entiers de p_1+1 à q_2 où q_2 est le plus petit entier $k > p_1$ tel que $\frac{\mathrm{Card}(\{0,\dots,k-1\}\cap A)}{k} \geqslant \frac{3}{4}$; puis dans B tous les entiers de q_2+1 à p_2 où p_2 est le plus petit entier $k > q_2$ tel que $\frac{\mathrm{Card}(\{0,\dots,k-1\}\cap A)}{k} \leqslant \frac{1}{4}$, et ainsi de suite... La suite $v := (\frac{\mathrm{Card}(\{0,\dots,k-1\}\cap A)}{k})_k$ n'admet pas de limite, car pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $v_{p_k} \leqslant \frac{1}{4}$ et $v_{q_k} \geqslant \frac{3}{4}$, $(p_k)_k$ et $(q_k)_k$ étant des suites d'entiers positifs strictement croissantes. Considérons alors la suite $u := (\mathbf{1}_A(k))_k$. La suite u est une suite bornée possédant exactement deux valeurs d'adhérence, 0 et 1, aucune n'étant régulière, sinon la suite v admettrait une limite d'après notre théorème. Or la suite v est la moyenne de Cesàro de la suite u. Cet exemple montre que nous ne pouvons pas supprimer – du moins sans en ajouter une autre – l'hypothèse de régularité des valeurs d'adhérence dans le théorème qui précède.

Concernant l'hypothèse $p_u(\infty) = 0$, remarquons que l'on ne peut la remplacer par l'hypothèse plus faible $\nu_u(\infty) = 0$. En effet, reprenons l'exemple donné en section II.2 : la suite u valant $2^{\sqrt{n}}$ si n est un carré, 0 sinon. Alors

$$\frac{\mathrm{Card}(\{k\in\{0,\dots,n-1\} \mid u_k > 0\})}{n} \sim \frac{\sqrt{n}}{n} \to 0,$$

ce qui implique $v_u(\infty) = 0$. Pourtant

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{\lfloor\sqrt{n-1}\rfloor} 2^j = \frac{2^{\lfloor\sqrt{n-1}\rfloor+1}-1}{n} \to +\infty,$$

ainsi la moyenne de Cesàro de u ne converge pas, et pourtant $u \in \Omega$.

III.3 Un exemple d’application

Exercice. *Soit $(\theta_n) \in [-\pi,\pi]^{\mathbb{N}^*}$ ayant pour seules valeurs d’adhérence 0, $\frac{2\pi}{3}$ et $-\frac{2\pi}{3}$. Nous supposons de plus que $\theta \in \Omega$, et que la série $\sum \frac{e^{i\theta_n}}{n}$ converge. Que dire des fréquences des valeurs d’adhérence de θ ?*

Solution. Avec une transformation d’Abel, nous remarquons que

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{i\theta_k} &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\frac{e^{i\theta_k}}{k}\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{e^{i\theta_j}}{j} - \sum_{j=1}^{k-1}\frac{e^{i\theta_j}}{j}\right)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\sum_{j=1}^{k}\frac{e^{i\theta_j}}{j} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\sum_{j=1}^{k-1}\frac{e^{i\theta_j}}{j},\end{aligned}$$

i.e

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{i\theta_k} &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\sum_{j=1}^{k}\frac{e^{i\theta_j}}{j} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)\sum_{j=1}^{k}\frac{e^{i\theta_j}}{j}\\ &= \sum_{j=1}^{n}\frac{e^{i\theta_j}}{j} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{k}\frac{e^{i\theta_j}}{j}.\end{aligned}$$

La suite de terme général $S_n := \sum_{k=1}^{n}\frac{e^{i\theta_k}}{k}$ converge vers un certain $S \in \mathbb{C}$. Nous avons

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{i\theta_k} = S_n - \frac{n-1}{n}\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} S_k \to S - S = 0,$$

d’après le théorème de Cesàro. Or, d’après notre théorème,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{i\theta_k} &= \sum_{\alpha\in\chi_\theta} \nu_\theta(\alpha)e^{i\alpha}\\ &= \nu_\theta(0) + \nu_\theta\Big(\frac{2\pi}{3}\Big)e^{i\frac{2\pi}{3}} + \nu_\theta\Big(-\frac{2\pi}{3}\Big)e^{-i\frac{2\pi}{3}}.\end{aligned}$$

Comme $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{i\theta_k} = 0$, en prenant la partie réelle et la partie imaginaire dans l’égalité précédente nous obtenons $\nu_\theta(0) = \nu_\theta(\frac{2\pi}{3}) = \nu_\theta(-\frac{2\pi}{3})$. Enfin, comme la somme des fréquences vaut 1 d’après la section II.3, nous en déduisons que les fréquences valent toutes $\frac{1}{3}$.